Herleitung der Feldstärken E und B am Ort der Kugel K2, wenn man die Kugel K1 als Ursache des Feldes hernimmt, aus klassischer ("vor-relativistischer") Sicht

Siehe dazu auch Bild (2.1) und Gleichung (2.2) des Blog-Posts "Widerspruch oder bloß eine Unschönheit?".

Die folgenden Rechnungen wurden nicht gegengelesen, und es ist durchaus wahrscheinlich, dass sie Rechenfehler enthalten! Bitte betrachte sie nur als Beispiel, um einen möglichen Rechengang zu veranschaulichen!

Um E(x,y,z,t) und B(x,y,z,t) zu berechnen, muss man eigentlich nur die Maxwell-Gleichungen lösen.

Nur? Na gratuliere, das sind partielle Differentialgleichungen unter Anwendung der Operatoren grad, rot, div und ∂/∂t.

Also Schluß mit lustig?

Na ja, halb so wild, diese Gleichungen hat ja schon einmal jemand gelöst, und zwar unter Verwendung der sogenannten elektrodynamischen Potentiale. Diese elektrodynamischen Potentiale – Φ und A_p – lassen sich so definieren, dass man E und B relativ einfach aus ihnen errechnen kann (das kann man alles nachlesen, z.B. im erwähnten Lehrbuch "Das elektromagnetische Feld" von H.Hofmann):

$$B(x,y,z,t)=rot\,A_p(x,y,z,t) \qquad (2a.1)$$

$$E(x,y,z,t)=-grad\,\phi(x,y,z,t)-\frac{\partial A_p(x,y,z,t)}{\partial t} \qquad (2a.2)$$

Die elektrodynamischen Potentiale Φ und A_p selbst wiederum lassen sich mit relativ simplen Rechenvorschriften aus der – gegebenen – Ladungsverteilung errechnen (das wird jetzt also die Lösung der Maxwell-Gleichungen)

Dazu muss man allerdings sagen, dass diese Lösung einen kleinen Haken hat. Die Verteilung und die Geschwindigkeit aller Ladungen im Raum muss bereits bekannt sein, um die folgenden beiden Gleichungen anwenden zu können. Eventuelle Rückwirkungen des elektromagnetischen Feldes auf eben diese Ladungsverteilung müssen bereits a priori berücksichtigt worden sein.

Es folgt (auch das kann man nachlesen)

$$\phi(x,y,z,t)=\int\int\int_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c_0})}{4\pi\epsilon_0\cdot r}dV \qquad (2a.3)$$

$$A_p(x,y,z,t)=\int\int\int_V \frac{\mu_0 S(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c_0})}{4\pi\cdot r}dV \qquad (2a.4)$$

mit den Abkürzungen

$$r=r_{Q,A}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} \qquad (2a.5)$$

und

$$dV=d\xi\cdot d\eta\cdot d\zeta \qquad (2a.6).$$

Was bedeuten jetzt diese beiden Volumsintegrale (2a.3) und (2a.4) ?

Dazu sollte man sich ins Klare kommen mit den Fragen "Was ist ein Aufpunkt" und "Was ist ein Quellpunkt".

Der sogenannte Aufpunkt (x,y,z) ist der Punkt, für den wir die elektrodynamischen Potentiale berechnen wollen (genau genommen, für ihn und für eine kleine Umgebung, damit wir dann die Operatoren rot, grad und ∂/∂t anwenden können).

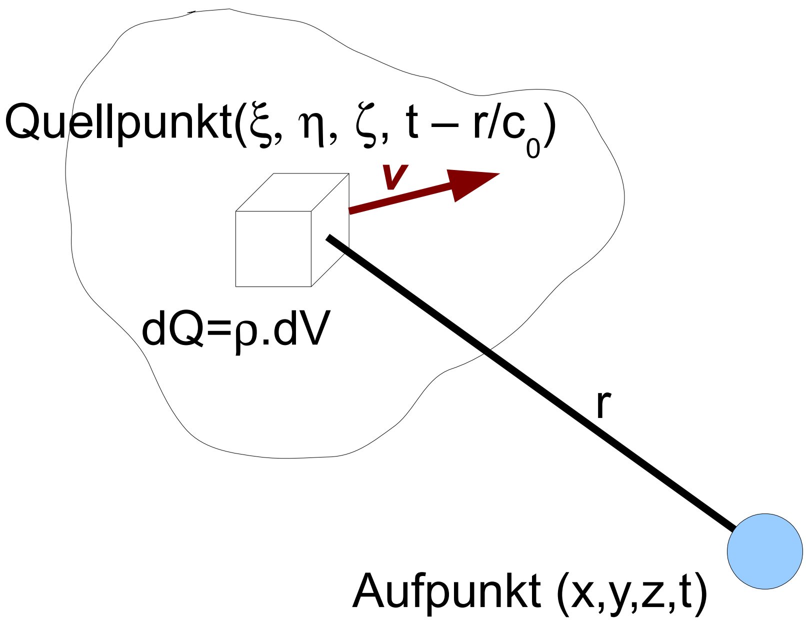
Der sogenannte Quellpunkt (ξ,η,ζ) ist der Punkt – also ebenfalls ein Ortsvektor – von dem die Ursache für das Feld ihren Ausgang nimmt. Da die Parameter (x,y,z) bereits verwendet werden – und auch innerhalb des Integrals vorkommen –, verwenden wir die griechischen Buchstaben (ξ,η,ζ) als "Laufvariablen" innerhalb des Integrals.

Demzufolge summieren wir alle Ursachen (an allen Quellpunkten), indem wir den Quellpunkt (ξ,η,ζ) bei konstantem Aufpunkt variieren und alle Auswirkungen überlagern (im Volumsintegral integrieren).

Weiters sollte man darüber nachdenken, dass die Ladungsdichte ρ(ξ,η,ζ) ein Skalarfeld ist (also ein Skalar – eben die Dichte –, das vom Ort abhängt). Auf der anderen Seite ist die Stromdichte S(ξ,η,ζ) ein Vektorfeld (Strom fließt immer in eine bestimmte Richtung).

Man kann sich das so vorstellen, dass sich eine infinitesimal kleine Ladung dQ=ρ.dV mit einer Geschwindigkeit v bewegt (v als Vektorfeld), sodass sie folgenden Beitrag liefert: v.dQ=S.dV.

Das sei noch einmal in einem Bild veranschaulicht:



(2a.7)

Man muss also die Ladungen ρ.dV in allen – infinitesimal kleinen – Volumselementen dV=dξ.dη.dζ berücksichtigen, um das Potential Φ zu errechnen (das Volumselement befindet sich dabei am sogenannten Quellpunkt (ξ,η,ζ) - den man variieren muss – und uns interessiert das Potential am sogenannten Aufpunkt (x,y,z)). Wenn sich die Ladung in einem Volumselement dV=dξ.dη.dζ mit der Geschwindigkeit v(x,y,z,t) bewegt, man beschreibt das durch die Stromdichte S, dann trägt das Volumselement zum Potential A_p bei.

Dabei nimmt der Einfluss mit wachsendem Abstand r ab (das ist der Abstand des jeweiligen Quellpunktes vom Aufpunkt). Das sieht man daran, dass r im Nenner steht.

Allerdings tragen eine freie Ladungsdichte ρ(ξ,η,ζ) bzw. eine Gesamtstromdichte S(ξ,η,ζ) erst dann zu einem elektrodynamischen Potential für den Aufpunkt (x,y,z) bei, wenn bereits die Zeit

$\Delta t = r/c_0$ vergangen ist (sog. "retardierte Potentiale"). Mit anderen Worten: elektromagnetische Wellen breiten sich mit der Lichtgeschwindigkeit c_0 aus.

Eine Ladungsdichte definiert man übrigens als "Ladung pro Volumen", also gemessen in Coulomb/m^3, bzw. A.s/m^3. Eine Stromdichte definiert man als "Ladung pro Zeiteinheit und Fläche", also gemessen in A.s/s/m^2 = A/m^2. Wenn man eine Ladungsdichte über ein Volumen integriert, muss man mit dem Volumselement $dV=d\xi.d\eta.d\zeta$ multiplizieren, die Einheit ist dann also Coulomb für die Gesamtladung innerhalb des Volumselementes bzw. A.m=Coulomb.m/s ("Ladung mal Geschwindigkeit") für das Integral der Stromdichte.

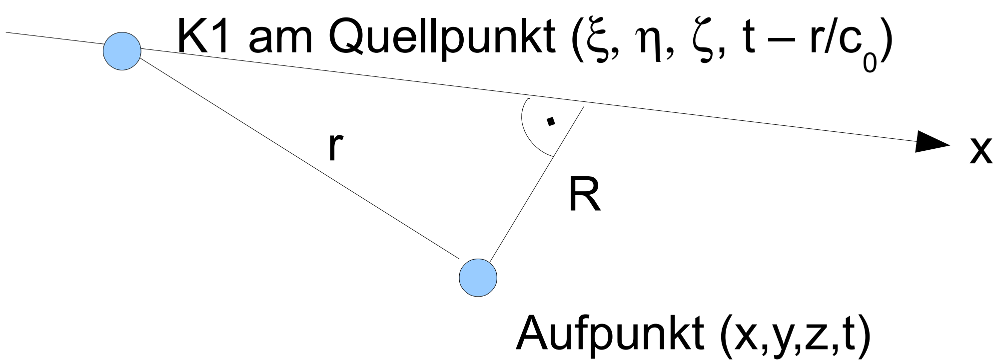
Um nun konkreter zu werden, wollen wir davon ausgehen, dass das gesamte elektromagnetische Feld nur von der bewegten Punktladung K1 erzeugt wird. Das heisst, die Größen $\rho(\xi,\eta,\zeta,t-r/c_0)$ und $S(\xi,\eta,\zeta,t-r/c_0)$ seien gegeben und bekannt.

Wenn sich nun die beiden Kugeln K1 und K2 gemäß der folgenden Weltlinien durch das ungestrichene Koordinatensystem bewegen

$$K1: x(t)=v\cdot t\,;\; y(t)=0\,;\; z(t)=0\,;\; t\in R \qquad (2a.8)$$

$$K2: x(t)=v\cdot t\,;\; y(t)=0\,;\; z(t)=L\,;\; t\in R \qquad (2a.9),$$

dann ist der Quellpunkt immer ein Punkt, an dem sich die Kugel K1 vor der Zeit $\Delta t=r/c_0$ befunden hat und die Aufpunkte, die uns interessieren sind immer in der Nähe von K2.



(2a.10)

Wegen der Tatsache, dass K1 eine bewegte Punktladung ist, folgt also, dass der Quellpunkt immer auf der Weltlinie des Punktes K1 liegen muss. Hier wollen wir die Hilfsgröße $\tau=t-r/c_0$ einführen. Dies sei die Zeit, die geherrscht hat, als die Kugel K1 den Quellpunkt passierte:

$$\xi = v\cdot\tau = v\cdot\left(t-\frac{r(\xi,\eta,\zeta,x,y,z)}{c_0}\right) \qquad (2a.11)$$

$$\eta=0$$

$$\zeta=0$$

Damit kann man – weil die Weltlinie des Ladungsträgers K1 bekannt ist und weil wir davon ausgehen, dass wir ihn als Punktladung behandeln können – die Quellpunktskoordinaten (ξ,η,ζ) eliminieren und eine Funktion $r=r(x,y,z,t)$ errechnen.

Wenn wir r(x,y,z,t) wissen, können wir die Volumsintegrale (2a.3) und (2a.4) letztlich durch folgende Rechenregeln ersetzen, die jetzt speziell auf eine Punktladung Q zugeschnitten sind, die sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse bewegt:

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\cdot r(x,y,z,t)} \qquad (2a.12)$$

$$A_p(x,y,z,t)=\frac{\mu_0\cdot Q\cdot v}{4\pi\cdot r(x,y,z,t)} \qquad (2a.13).$$

Die **konkrete Berechnung der Funktion r(x,y,z,t)** ist ein wenig länglich, sei hier aber kurz skizziert:

Vorerst berechnen wir

$$\xi=\xi(x,y,z,t) \qquad (2a.14),$$

sodass die folgende Gleichung erfüllt wird (Weltlinie der Kugel K1)

$$\frac{\xi}{v}=\tau=t-\frac{\sqrt{(\xi-x)^2+R^2}}{c_0} \qquad (2a.15)$$

mit der Abkürzung

$$R^2=y^2+z^2 \qquad (2a.16).$$

Nach einer kleinen Umformung erhalten wir eine Gleichung, die wir quadrieren können:

$$c_0\cdot\left(t-\frac{\xi}{v}\right)=\sqrt{(\xi-x)^2+R^2} \qquad (2a.17),$$

also

$$c_0^2\cdot\left(t-\frac{\xi}{v}\right)^2=(\xi-x)^2+R^2 \qquad (2a.18).$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in ξ, die sich lösen läßt (das ist allerdings ein wenig Arbeit, zumindest, wenn man es manuell macht, so wie ich).

Die Lösung lautet

$$\xi=\gamma^2\cdot\left[\left(v\cdot t-\frac{v^2}{c_0^2}\cdot x\right)\pm\frac{v}{c_0}\cdot\sqrt{(v\cdot t-x)^2+\frac{R^2}{\gamma^2}}\right] \qquad (2a.19)$$

mit der Abkürzung

$$\gamma^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c_0^2}} \qquad (2a.20).$$

Um nun eine der beiden Lösungen auszuscheiden, erinnern wir uns, dass vor dem Quadrieren der Gleichung (2a.17) die Ungleichung

$$t-\frac{\xi}{v}>0 \qquad \text{(2a.21)},$$

also

$$\xi-v\cdot t<0 \qquad \text{(2a.22)},$$

gegolten hat. Sodann formen wir das Ergebnis für ξ ein wenig um

$$\xi=v\cdot t+\gamma^2\cdot\frac{v^2}{c_0^2}\cdot(v\cdot t-x)\pm\gamma^2\cdot\frac{v}{c_0}\cdot\sqrt{(v\cdot t-x)^2+\frac{R^2}{\gamma^2}} \qquad \text{(2a.23)},$$

und berücksichtigen die Tatsache, dass uns nur Aufpunkte in der Nähe von K2 interessieren. Wir wissen also folgende Zusammenhänge:

$$R\approx L \qquad \text{(2a.24)}$$

$$|v\cdot t-x|\ll L \qquad \text{(2a.25)}.$$

Damit ergibt sich für die Ungleichung $\xi-v\cdot t<0$ folgende Schreibweise

$$\gamma^2\cdot\frac{v^2}{c_0^2}\cdot(v\cdot t-x)\pm\gamma^2\cdot\frac{v}{c_0}\cdot\sqrt{(v\cdot t-x)^2+\frac{R^2}{\gamma^2}}<0 \qquad \text{(2a.26)},$$

was man näherungsweise ersetzen kann durch

$$\frac{v}{c_0}(v\cdot t-x)\pm\frac{L}{\gamma}<0 \qquad \text{(2a.27)}.$$

Wir sind hier davon ausgegangen, dass v>0 ist, weiters wissen wir, dass γ immer größer 1 ist, und solange v klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit, ist es näherungsweise gleich 1. Wir sehen, dass der rechte Term in Ungleichung (2a.27) betragsmäßig sehr viel größer ist als der linke, weshalb wir schließen, dass die zweite Lösung für ξ verwendet werden muss (die mit dem Minus vor der Wurzel).

Jetzt haben wir also eine Lösung der quadratischen Gleichung ausgeschieden und stehen bei einem Zwischenergebnis, das für beliebige Aufpunkte in der Nähe von K2 gilt, wenn v>0:

$$\xi(x,y,z,t)=\gamma^2\cdot[(v\cdot t-\frac{v^2}{c_0^2}\cdot x)-\frac{v}{c_0}\cdot\sqrt{(v\cdot t-x)^2+\frac{R^2}{\gamma^2}}] \qquad \text{(2a.28)}.$$

Aber eigentlich sind wir nicht an ξ(x,y,z,t) interessiert, sondern an r(x,y,z,t), müssen also noch in Gleichung (2a.5) einsetzen:

$$r(x,y,z,t)=\sqrt{(\xi(x,y,z,t)-x)^2+R^2} \qquad \text{(2a.29)}.$$

Nach ein wenig Rechenarbeit folgt:

$$r(x,y,z,t)=\gamma^2\cdot[\sqrt{(v\cdot t-x)^2+\frac{R^2}{\gamma^2}}-\frac{v}{c_0}\cdot(v\cdot t-x)] \qquad \text{(2a.30)}.$$

Dieses Ergebnis r(x,y,z,t) können wir nun in die Gleichungen (2a.12) und (2a.13) einsetzen, um dann das endgültige Ergebnis für die elektrodynamischen Potentiale anzuschreiben, gültig für Aufpunkte in der Nähe von K2 und für v>0:

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2}\cdot f(x,y,z,t) \qquad (2a.31)$$

$$A_p(x,y,z,t)=\frac{\mu_0 Q v}{4\pi\gamma^2}\cdot f(x,y,z,t)\cdot e_x \qquad (2a.32)$$

mit der Abkürzung

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{(v\cdot t-x)^2+\frac{R^2}{\gamma^2}}-\frac{v}{c_0}\cdot(v\cdot t-x)} \qquad (2a.33).$$

Letzten Endes wollen wir natürlich die Felder E(x,y,z,t) und B(x,y,z,t) berechnen, die elektrodynamischen Potentiale waren ja nur ein Hilfskonstrukt.

Dazu setzen wir die Ergebnisse (2a.31) und (2a.32) in die Gleichungen (2a.1) und (2a.2).

Für das magnetische Feld B ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift

$$B=rot\,A_p=\nabla\times A_p=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}\times A_p \qquad (2a.34),$$

also

$$B=\frac{\mu_0 Q v}{4\pi\gamma^2}\cdot\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f(x,y,z,t)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \textbf{(2a.35)}.$$

Für das elektrische Feld ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift

$$E=-grad\,\phi-\frac{\partial}{\partial t}A_p=-\nabla\cdot\phi-\frac{\partial}{\partial t}A_p \qquad (2a.36),$$

also

$$E=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2}\cdot\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}f(x,y,z,t)-\frac{\mu_0 Q v}{4\pi\gamma^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}f(x,y,z,t)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (2a.37),$$

was man mit Hilfe des wohlbekannten Zusammenhangs

$$\epsilon_0\cdot\mu_0\cdot c_0^2=1 \qquad (2a.38)$$

nocheinmal umschreiben kann:

$$E=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2}\cdot[\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}f(x,y,z,t)+\frac{v}{c_0^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}f(x,y,z,t)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}] \qquad \textbf{(2a.39)}.$$

Wenn man nun noch die partiellen Ableitungen der Funktion f(x,y,z,t) nach den Parametern x,y,z und t berechnet, kann man die Weltlinie der Kugel K2 einsetzen (x=v.t, y=0, z=L) und somit die Felder E(K2) und B(K2) errechnen.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z,t) = -f^2(x,y,z,t) \cdot \left[\frac{v}{c_0} - \frac{v \cdot t - x}{\sqrt{(v \cdot t - x)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}}\right] \qquad (2a.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z,t) = -f^2(x,y,z,t) \cdot \frac{y/\gamma^2}{\sqrt{(v \cdot t - x)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z,t) = -f^2(x,y,z,t) \cdot \frac{z/\gamma^2}{\sqrt{(v \cdot t - x)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,y,z,t) = -f^2(x,y,z,t) \cdot \left[\frac{v \cdot (v \cdot t - x)}{\sqrt{(v \cdot t - x)^2 + \frac{R^2}{\gamma^2}}} - \frac{v^2}{c_0}\right]$$

Wenn wir nun also die Weltlinie der Kugel K2 in die Gleichungen (2a.40) einsetzen (x=v.t, y=0, z=L), erhalten wir die konkreten Werte der partiellen Ableitungen am Aufpunkt, wenn sich der Aufpunkt an der Stelle der Kugel K2 befindet,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\gamma^2}{L^2} \cdot \left[\frac{v}{c_0}\right] \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\gamma}{L^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\gamma^2}{L^2} \cdot \frac{v^2}{c_0} \qquad (2a.41),$$

und können diese Werte in die Berechnungsvorschriften für die Feldstärken (2a.35) und (2a.39) einsetzen:

$$B = \frac{\mu_0 Q v}{4 \pi \gamma^2} \cdot \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f(x,y,z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 Q v}{4 \pi \gamma^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \partial f / \partial z \\ -\partial f / \partial y \end{pmatrix} \qquad (2a.42),$$

also

$$B = \frac{\mu_0 Q v}{4 \pi \gamma L^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\underline{(2a.43)}}.$$

Für das elektrische Feld erhalten wir

$$E = -\frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 \gamma^2} \cdot \left[\begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} f(x,y,z,t) + \frac{v}{c_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f(x,y,z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \qquad (2a.44),$$

also

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 \gamma^2} \cdot \begin{pmatrix} -\partial f / \partial x - \frac{v}{c_0^2} \cdot \partial f / \partial t \\ -\partial f / \partial y \\ -\partial f / \partial z \end{pmatrix} \qquad (2a.45),$$

also

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 \gamma L^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{\gamma \cdot c_0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\underline{(2a.46)}}.$$